EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO (7/7/2014)
SOLUCIONES

1. **(1 punto)** Calcule el siguiente límite, si existe: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$.

Solución.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{\sqrt{n^2+1}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n^2+1}\,\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)}$$, y dado que
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\,\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\left(\frac{n+1}{n-2}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n^2+1}}{n-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 3\sqrt{\frac{n^2+1}{(n-2)^2}} = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{\sqrt{n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\,\ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)} =$$
$$= \boxed{e^3}$$

2. **(1 punto)** Estudie la convergencia de las series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+3)}{4^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Solución. a) Estudiamos la convergencia absoluta puesto que se trata de una serie con términos positivos y negativos. Se verifica:

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad \left|\frac{\operatorname{sen}(2n+3)}{4^n}\right| \leq \frac{1}{4^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ converge pues es una serie geométrica de razón $1/4 = r$ y $|r|<1$.

Por el criterio de comparación, de 1) y 2), se deduce que la serie es absolutamente convergente.

b) Se observa que

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ pues $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ ya que $3/2 > 1$. Por tanto, la serie no cumple el criterio del término n-ésimo para la convergencia y, dado que es de términos positivos, la serie es divergente.

3. (**1,5 puntos**) Halle el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^{n-1}\sqrt{n}}.$$

Solución. Utilizando el criterio de la raíz con el valor absoluto, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^n}{10^{n-1}\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{10} < 1,$$

de donde, si $|x| < 10$ la serie es absolutamente convergente y si $|x| > 10$ la serie no converge; luego el *radio de convergencia es* $R = 10$. Como es una serie de potencias centrada en $x_0 = 0$ y radio de convergencia $R = 10$, hay que estudiar la convergencia en los extremos del intervalo $[-10, 10]$.

En $x = 10$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{10^{n-1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt{n}} = 10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que es divergente por ser la serie armónica generalizada con con exponente $1/2 \leq 1$.

En $x = -10$, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{10^{n-1}\sqrt{n}} = 10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

que por el criterio de Leibnitz es convergente, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{10}{\sqrt{n+1}} < \frac{10}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El *campo de convergencia de la serie es* $[-10, 10)$.

4. (**1 punto**) Calcule el siguiente límite, si existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4 + y^6}.$$

Por subconjuntos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^3y}{x^4+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^6} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$\neq$ $\Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^6}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^3y}{x^4+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

5. **(1,5 puntos)** Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución. *Continuidad en el origen:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \cos\theta \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\rho\to 0} \cos\theta \frac{2\rho}{1+\rho^2} = 0 = f(0,0),$$

por lo que f es continua en $(0,0)$.

Diferenciabilidad en el origen:

Veamos si existen la derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Para ver la diferenciabilidad, estudiamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\dfrac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\theta \dfrac{\log(1+\rho^2)}{\rho} - \rho\cos\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \cos\theta \left(\frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2} - 1 \right) = 0,$$

por lo que f es diferenciable en $(0,0)$.

6. *(2 puntos)* Dada la función $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 10y$, determine:

   a) Los extremos relativos f en $\mathbb{R}^2$.

   b) Los extremos absolutos de f sobre el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

Solución:

a) Como la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ todos sus extremos relativos son puntos críticos, que son las soluciones de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 18y - 10 = 0.$$

El único punto crítico es el $(0, \frac{5}{9})$. Si calculamos la matriz Hessiana de f en dicho punto es:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Como $|H| > 0$ y $8 > 0$ *en el punto* $(0, \frac{5}{9})$ f *alcanza un mínimo relativo.*

b) Selección de puntos donde f puede alcanzar extremos absolutos:

• En $\overset{\circ}{D}$: Se selecciona el punto hallado en el apartado anterior apartado, $(0, 5/9)$, puesto que pertenece a $\overset{\circ}{D}$.

• En $Fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$: Utilizaremos el teorema de los multiplicadores de Lagrange considerando $Fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : g(x, y) = 0\}$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Pues

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y = 0$$

y $(0, 0) \notin Fr(D)$, todos los puntos de $Fr(D)$ son regulares. Buscamos $(x, y) \in Fr(D)$ tal que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$8x = 2\lambda x \qquad 18y - 10 = 2\lambda y \qquad x^2 + y^2 = 4$$

Si $x = 0$ tenemos que $y = 2$ o $y = -2$ con lo cual obtenemos los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$. Si $x \neq 0$ tenemos que $\lambda = 4$ con lo que $y = 1$ y por lo tanto obtenemos los puntos $(\sqrt{3}, 1)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$.

Evaluación de f sobre los puntos seleccionados y conclusión: $f(0, 5/9) = -25/9$, $f(0, 2) = 16$, $f(0, -2) = 56$ y $f(\pm\sqrt{3}, 1) = 11$.

Por tanto, el *máximo absoluto de f sobre D es 56 y se alcanza en el punto* $(0, -2)$, mientras que el *mínimo absoluto es $-25/9$ y f lo alcanza en* $(0, 5/9)$.

7. **(1 punto)** Calcule

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Solución. Por tratarse de dos polinomios de igual grado se hace la división y queda

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{6x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Para factorizar el denominador resolvamos $x^2 - 3x + 2 = 0$, resulta

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2, \\ \frac{3-1}{2} = 1. \end{cases}$$

Luego tenemos que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, descompongamos en fracciones simples

$$\frac{6x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{6x}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2},$$

es decir partimos de

$$A(x - 2) + B(x - 1) = 6x.$$

Haciendo $x = 2$, obtenemos $B(2-1) = 12$, luego $B = 12$. Por otro lado haciendo $x = 1$, tenemos que $A(1-2) = 6$, luego $A = -6$. Por lo que

$$\frac{6x}{x^2-3x+2} = \frac{-6}{x-1} + \frac{12}{x-2}.$$

Integrando ahora queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\,dx &= \int \left(1 + \frac{6x}{x^2-3x+2}\right) dx = \int dx + \int \left(\frac{-6}{x-1} + \frac{12}{x-2}\right) dx \\
&= x - 6\ln(x-1) + 12\ln(x-2) + C \\
&= x + \ln\frac{(x-2)^{12}}{(x-1)^6} + C,
\end{aligned}$$

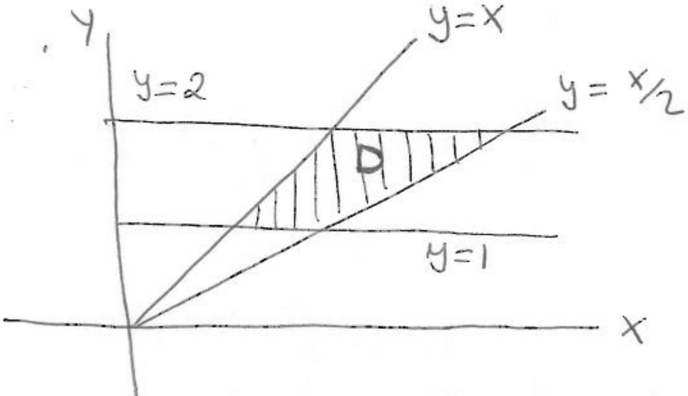
siendo $C \in \mathbb{R}$.

8. (**1 punto**) Calcule la integral

$$I = \iint_D xy\,dxdy,$$

donde D es la región del plano acotada entre las rectas $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ e $y = x/2$.

Solución.



D es una región tipo II pues $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 2y \end{array} \right\}$,

luego

$$I = \int_1^2 \left(\int_y^{2y} xy\,dx \right) dy = \int_1^2 y \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=2y} \right) dy$$

$$= \int_1^2 y \left(2y^2 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{3}{2} \int_1^2 y^3 dy = \frac{3}{2} \left(\left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=1}^{y=2} \right)$$

$$= \boxed{\frac{45}{8}}$$